21/2/2008 אלגוריתמים ברשתות סמ' א'

## זרימה במחיר מינימום:

- הגדרה
- משפט Klein
- מחירים מופחתים
- אלגוריתם של Klein (ביטול מעגלים שליליים)
- אלגוריתם scaling

## זרימה במחיר מינימום

$G=(V,E)$ גרף מכוון עם קב' קשתות סימטרית $((x,y)\in E \Rightarrow (y,x)\in E)$

$u: E\to \mathbb{R}$ פונקצית קיבולים (מותר $u(e)<0$).

$c: E\to \mathbb{R}$ פונקצית מחירים אנטי-סימטרית $(c(x,y)=-c(y,x))$

$f: E\to \mathbb{R}$ זרימה מקיימת:

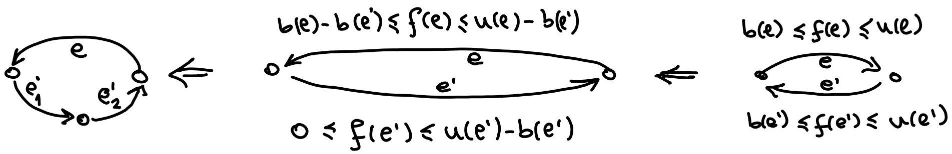
1. אילוץ קיבול $\forall e:\ f(e)\le u(e)$
2. אנטי סימטרית $f(x,y)=-f(y,x)$
3. חוק שימור $\forall x:\ \sum_y f(x,y)=0$

מחיר זרימה $\triangleq$ $cost(f)=\frac{1}{2}\sum_e c(e)\cdot f(e)$

הערות:

1. למה קיבולים שליליים? (דרך לאלץ חסמים תחתונים)

ראינו כבר רדוקציה מהגדרות של זרימה עם חסמים תחתונים לזרימה רגילה:




ואז לכל קשת אין קשת הפוכה.

ועכשיו מוסיפים קשת הפוכה עם קיבול $-b(e)$ ...

2. למה מחירים אנטי-סימטריים?

הזרמת יחידת זרימה ב-e עולה $c(e)$.

הזרימה אנטי-סימטרית, ולכן זרימה של יחידה ב-$(x,y)$ גוררת מינוס יחידת זרימה בכיוון $(y,x)$:

מחיר הזרימה ב-$(x,y)$    מחיר הזרימה ב-$(y,x)$

$$c(x,y)\cdot f(x,y)+c(y,x)\cdot f(y,x)=2\cdot f(x,y)\cdot c(x,y)$$

3. למה לחלק את $\sum c(e)f(e)$ ב-2?

הגרף השיורי: הקיבולים השיוריים לא משנים דבר!

קיבול שיורי: $r_f(e) \triangleq u(e) - f(e)$

(ואין קושי בהגדרה כי $E$ סימטרית)

קשת שיורית: אם $r_f(e) > 0$.

"לינאריות" ממשיכה להתקיים:

$f$ זרימה ב-$N$ וגם $g$ זרימה ב-$N_f$ אזי $f+g$ זרימה ב-$N$.

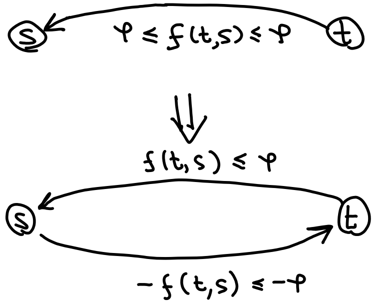
וכן $\mathrm{cost}(f+g) = \mathrm{cost}(f) + \mathrm{cost}(g)$

פירוק למעגלי זרימה ממשיך להתקיים.

④ למה זרימה מעגלית?

מכליל זרימת $(s,t)$ רגילה שבה דורשים $\varphi = |f|$.

רדוקציה:




מכליל גם בעיית transshipment:

מחירים "מופחתים" (reduced costs)

פונקציית מחירים $p : V \to \mathbb{R}$

אינטואיציה: $p(v)$ = מחיר הסחורה ב-$v$.

מחיר מופחת: $c_p(v,w) \triangleq p(v) + c(v,w) - p(w)$

אינטואיציה: $c_p(v,w)$ = הרווח מקניית סחורה ב-$v$, הובלתה ל-$w$ ומכירתה ב-$w$.

תכונות:

$$\forall (x,y)\in E : \quad c_p(x,y) = -c_p(y,x)$$

$$\forall\, x \overset{\pi}{\rightsquigarrow} y : \quad c_p(\pi) = p(x) + c(\pi) - p(y)$$

$$\forall \text{ cycle } \gamma : \quad c_p(\gamma) = c(\gamma)$$

$$\sum_e c_p(e)\cdot f(e) = \sum_e c(e)\cdot f(e)$$

משפט (Klein 67): $f$ זרימה במחיר מינימום אמ"מ אין מעגל במחיר שלילי ב-$N_f$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ זרימה $g$ במעגל במחיר שלילי ב-$N_f$ גוררת:

$$\mathrm{cost}(f+g) = \mathrm{cost}(f) + \mathrm{cost}(g) < \mathrm{cost}(f)$$

$(\Rightarrow)$ תהי $f^*$ זרימה במחיר מינימום המקיימת $\mathrm{cost}(f^*) < \mathrm{cost}(f)$.

נטען: $(f^*-f)$ היא זרימה חוקית בגרף השיורי $N_f$.

אילוצי קיבול:

$$(f^*-f)(e) = f^*(e) - f(e) \le u(e) - f(e) = r_f(e)$$

ובגלל לינאריות $(f^*-f)$ אנטי-סימטרית ומקיימת שימור זרימה.

אבל $\mathrm{cost}(f^*-f)<0 \Rightarrow$ יש מעגל שלילי ב-$N_f$ (כי נפרק את $(f^*-f)$ למעגלי זרימה.

∎

**מסקנה:** בע"ת מציאת זרימה במחיר מינימום של מחירים $c(e)$ שקולה למציאת זרימה במחיר מינימום של מחירים מופחתים $c_p(e)$.

**משפט** (Ford & Fulkerson 62): זרימה מעגלית f היא במחיר מינימום אמ"מ קיימת פונקצית מחירים p עבורה:

$$\forall e\in E:\quad r_f(e)>0 \;\Rightarrow\; c_p(e)\geq 0$$

**הוכחה:** הכיוון הקל $(\Rightarrow)$: אם קיימת p עבורה $c_p(e)>0$ לכל קשת שורית, הרי שברור שאין מעגל שלילי ב-$N_f$ ביחס ל-$c_p$. לכן f במחיר מינימום ביחס ל-$c_p$, ולכן גם ביחס ל-c.

$(\Leftarrow)$ מחפש p עבורה $0\leq c_p(x,y)=p(x)+c(x,y)-p(y)$ לכל קשת $(x,y)$. כלומר: $p(y)\leq p(x)+c(x,y)$.

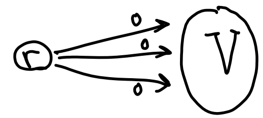
למה הדבר דומה? לפונקצית מרחק $p(a)=dist_c(r,a)$

כאשר: r - הוא צומת שממנו נמדדים המרחקים
c - אורכי הקשתות.

צריך להקפיד ש-$dist_c(r,a)$ יהיה מוגדר היטב.

(א) שלא יהיה $+\infty$: כלומר מ-r יש מסלול לכולם...

נוסיף צומת חדש r ונחבר אותו לכולם בקשת באורך 0.




(ב) שלא יהיה $-\infty$: כלומר שלא נחלוף מספר לא חסום של פעמים דרך מעגל שלילי. אבל המרחקים נמדדים ב-$E_f$, ושם אין מעגל שלילי כי f במחיר מינימום.

ולכן $p(v)\triangleq \min\left\{ c(\pi) \;\middle|\; r\overset{\pi}{\rightsquigarrow} v \right\}$ ($\pi$ מסלול ב-$E_f$) מקיים את הנדרש. ☒

**אלגוריתם בטול המעגלים עם מחירים שליליים [Klein 67]**

(1) חשב זרימה מעגלית חוקית f.

(2) כל עוד $N_f$ מכיל מעגל $\gamma$ עם מחיר שלילי: שפר זרימה לאורך $\gamma$.

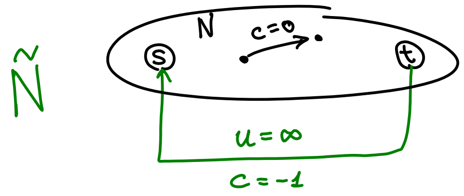
$$\begin{cases} \varepsilon = \min\{ r_f(e) : e\in\gamma \} \\ g \triangleq \text{זרימה בכמות } \varepsilon \text{ לאורך } \gamma \\ f \leftarrow f+g \end{cases}$$

**סיבוכיות:** אם הקיבולים והמחירים שלמים אז מס' האיטרציות באלג' של קליין חסום ע"י $O(m\cdot U\cdot C)$, כאשר $U\triangleq \max\{|u(e)|\}_e$ , $C\triangleq \max\{|c(e)|\}_e$

הוכחה: כיון שהקיבולים שלמים נקבל שבכל איטרציה $\varepsilon \ge 1$.
כיון שהמחירים שלמים, למעגל שלילי מחיר $\le -1$.
ולכן בכל איטרציה הירידה במחיר $\ge 1$.
מאידך
$$\frac{1}{2}\sum_e c(e)\cdot f(e) \ge -\frac{1}{2} m\cdot C\cdot U \quad \boxtimes$$

זמן ריצה פסאודו-פולינומי...

מציאת זרימה מעגלית במחיר מינימום מכלילה את הבעיה של מציאת זרימה מקס' (ללא מחירים).

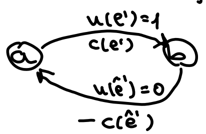



הרדוקציה היא:
ומציאת זרימה מקס' מ s ל-t
מתעדפת את המחיר בגלל
הקשת החדשה מ-t ל-s.
מה עושה האלג' של קליין ברשת הנ"ל?

מעגל שלילי ב $\tilde N_f$ ⟷ מסלול שיפור ברשת השיורית $N_f$

⇐ קליין מכליל את Ford & Fulkerson !

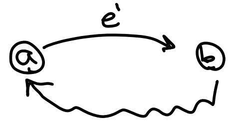
אלגוריתם capacity scaling לזרימה במחיר מינימום
- נניח: קיבולים שלמים לא שליליים, $\forall e: u(e)\in\mathbb{N}$
- נתחיל בשאלה הבאה:
נתונה זרימה $f$ במחיר מינימום ברשת $N$.
כעת מוסיף קשת $a\xrightarrow{e'} b$ במחיר $c(e')$ ובקיבול 1.
כלומר:




האם ידיעת $f$ ב $N$ עוזרת למציאת זרימה במחיר מינימום ב $N'=N+e'$?

נעיר: אפילו אם $c(e')>0$ יתכן ה-$f$ אינה במחיר מינימום ב $N'$...

נשאל האם הוספת $e'$ (והקשת ההפוכה) מייצרת מעגל שלילי ברשת $N'_f$?

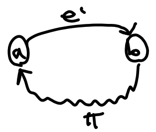



$\pi$ מסלול במחיר מינימום ב $N_f$

מעגל שלילי יתכן רק מהצורה
כאשר: $c(e') + c(\pi) < 0$

ולכן נחפש מסלול זול ביותר $\pi$ מ $b$ ל $a$.

אם $c(e')+c(\pi) > 0$, אז אין מעגל שלילי, ו-$f$ נשארת במחיר מינימום גם ב $N'$. (ונגדיר $f'=f$).
אם $c(e')+c(\pi)<0$, אז נעביר יחידת זרימה במעגל $e'+\pi$ לקבלת $f'$.



## טענה: $f'$ זרימה במחיר מינימום ב-$N'$.

הוכחה: נסמן $S = \{ v \mid$ קיים מסלול מ-$b$ ל-$v$ ב-$N_f \}$

כמובן $a \in S$ (כי $c(\pi)<\infty$), וכן צמתי $\pi$ ב-$S$.

ולכן אם $N'_{f'}$ מכילה מעגל שלילי $\gamma$, אז צמתי המעגל מוכלים ב-$S$.

נשתמש בפונקציית מחירים $d : S \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$d(v) = \min\{ c(\pi') \mid \pi' \text{ מסלול מ-} b \text{ ל-} v \text{ ב-} N_f \}$$

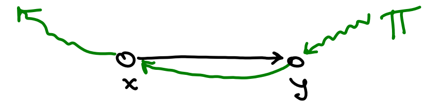
אם $e \in N_f$ כמובן $c_d(e) \geq 0$.

עבור $e'$ נקבל $r_{f'}(e')=0$ ואין בעיה.

עבור $rev(e')$

$$c_d(b,a) = d(b) + c(b,a) - d(a) = 0 - c(a,b) - c(\pi) > 0$$

נותר לדון בקשת $(x,y) \in N'_{f'}$ שאינה ב-$N_f$.



יתכן רק אם $(y,x) \in \pi$.

$$c_d(y,x) = d(y) + c(y,x) - d(x) = 0 \quad (\text{כי } \pi \text{ מסלול קצר ביותר})$$

ולכן $c_d(x,y) = 0$.

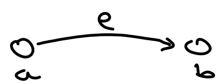
∎

## אלג' הדירוג capacity scaling

דומה לאלג' של Gabow. יהי $k = \lceil \lg_2(\max\{u(e)\}+1) \rceil$

נפצל כל קשת ל-$k$ קשתות מקבילות.

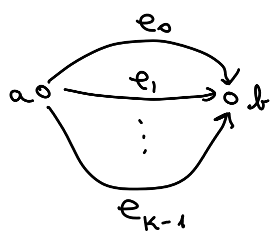
הקיבול של הקשת ה-$i$ הוא $2^i$ או $0$, בהתאם לספרת ה-$i$ בבינרי של $u(e)$.



$$u(e) = \langle \alpha_{k-1} \cdots \alpha_0 \rangle$$

אז

$$u(e_i) = \alpha_i \cdot 2^i$$



נמיין את הקשתות (המפוצלות) לפי קיבול.

$$E_i = \{ e \mid u(e_i) = 2^i \}$$

תאור האלג':

1. מתחיל ברשת $(V,E')$ כאשר $E'=\emptyset$ עם זרימה $0$.
2. עבור $i=k-1$ ועד $0$ בצע:
3. כל עוד קיימת קשת $e \in E_i$ שלא הוכנסה ל-$E'$:
   - הוסף את $e$ ל-$E'$ עם קיבול $u(e')=1$ ומחיר $c(e')$.
   - חשב זרימה במחיר מינימום $f'$ ב-$(V,E')$.
4. הכפל קיבולים וזרימות ב-$E'$ פי 2.
5. החזר את $f$.