אלג' ברשתות 25/2/08

אלג' למציאת מעגל במשקל ממוצע מזערי [Karp].

אלגוריתם למציאת מעגל עם משקל ממוצע מזערי [Karp]

$G=(V,E)$ - גרף מכוון, בה"כ קשיר היטב.

$w: E \to \mathbb{R}$ - משקל קשתות

נסמן: עבור מסלול P: $w(P) \triangleq \sum_{e\in P} w(e)$

$l(P) \triangleq$ אורך המסלול (מס' קשתות כולל חזרות)

משקל ממוצע: $A(P) \triangleq \frac{w(P)}{l(P)}$

$\hat{A} \triangleq \min\{A(C) \mid C$ מסלול מעגלי ב-$G\}$

בעיה: חשב את $\hat{A}$ ומצא מעגל C שמקיים $A(C)=\hat{A}$.

הערות:

(1) $\hat{A}$ מוגדר היטב אם G מכיל מעגל.

(2) קיים מעגל פשוט C עבורו: $A(C)=\hat{A}$

(3) מעגל פשוט C המקיים $A(C)=\hat{A}$ נקרא מעגל קריטי.

סימונים:

$$w_k(a,b) \triangleq \text{MIN}\left\{ w(P) \;\middle|\; a \overset{P}{\rightsquigarrow} b,\ l(P)=k \right\}$$

(מינימום של קבוצה ריקה הוא $+\infty$).

וכן
$$w_0(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{if } a=b \\ \infty & \text{if } a\neq b \end{cases}$$

משפט [Karp]: אם $\hat{A}=0$ אז לכל צומת r מתקיים

$$\min_{v\in V}\ \max_{0\le k<n}\left(\frac{w_n(r,v)-w_k(r,v)}{n-k}\right) = 0$$

הוכחה: נתחיל בהוכחת ≥ 0.

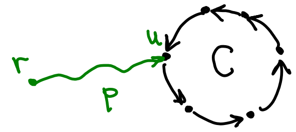
אם $\hat{A}=0$, אז אין מעגל שלילי. בנוסף G קשיר היטב ולכן מסלול קל ביותר מוגדר היטב:

$$w^*(r,v) \triangleq \text{MIN}\left\{ w(P) \;\middle|\; r \overset{P}{\rightsquigarrow} v \right\}$$

כמובן
$$w^*(r,v) = \text{MIN}_{0\le k<n}\ w_k(r,v)$$

ולכן
$$w_n(r,v) \geq w^*(r,v)$$

אם $\hat{A}=0$ אז קיים מעגל פשוט C במשקל 0.



נבחר $u \in C$ כלשהו, ונמצא מסלול קל ביותר P מ-r ל-u.

כלומר $w^*(r,u) = w(P)$.

טענה: לכל $i \ge 0$: $P_i \triangleq P \circ C^i$ הוא מסלול קל ביותר מ r ל-u.

הוכחה: $w(P_i) = w(P) + i \cdot w(C) = w(P) = w^*(r,u)$. ⊠

מסקנה: כל רישא של P_i היא גם כן מסלול קל ביותר מ-r לצומת האחרון ב-P_i.

בנוסף ונקבל $w_n(r,v) \ge w^*(r,v) = \min_{0 \le k < n} w_k(r,v)$

$\Leftarrow$ $w_n(r,v) - \min_{0 \le k < n} w_k(r,v) \ge 0$

$\max -f(x) = -\min f(x)$

$\Leftarrow$ $\max_{0 \le k < n} \left(w_n(r,v) - w_k(r,v) \right) \ge 0$

ולכן אגף שמאל ≥ 0.

כעת נראה שאגף שמאל $=0$, כלומר, נוכיח

(*) $\exists v \in V: \quad w_n(r,v) = w^*(r,v)$

מסקנה: $\forall r: \quad \min_{v \in V} \max_{0 \le k < n} \frac{w_n(r,v) - w_k(r,v)}{n-k} = \hat{A}$

הוכחה: נפתור את המקרה $\hat{A} \neq 0$ למקרה $\hat{A}=0$.

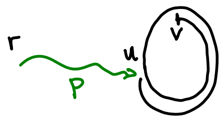
נגדיר $w'(e) \triangleq w(e) + \alpha$. כיצד משפיעה ההגדרה על 2 האגפים:

$$A'(C) = \frac{w'(C)}{l(C)} = \frac{w(C) + l(C) \cdot \alpha}{l(C)} = A(C) + \alpha$$

ולכן $\hat{A}' = \hat{A} + \alpha$. יתרה מזאת

$$\{C \mid C \text{ קריטי ביחס ל-} w\} = \{C \mid C \text{ קריטי ביחס ל-} w'\}$$

נבחר i מספיק גדול כדי ש $l(P_i) \ge n$.



יהי p' רישא של P_i באורך n.

נסמן ב-v את הצומת האחרון ב P_i.

P_i מסלול קל ביותר $\Leftarrow$ $w^*(r,v) = w(P_i)$

P_i באורך n $\Leftarrow$ $w_n(r,v) \le w(P_i)$

לכן $w_n(r,v) \le w^*(r,v)$, ולכן v מקיים את (*). ⊠

האלגוריתם

קבע $r\in V$, מלא טבלה $w_k(r,v)$ לכל $v\in V$, $0\le k<n$.

חשב בזמן $O(n^2)$ את $\hat{A}$ לפי המסקנה.

איך ממלאים טבלה: תכנות דינמי.

$$w_0(r,v)=\begin{cases}0 & \text{if } r=v\\ \infty & \text{o.w.}\end{cases}$$

$$w_1(r,v)=\begin{cases}w(r,v) & \text{if } (r,v)\in E\\ \infty & \text{o.w.}\end{cases}$$

$$w_{i+1}(r,v)=\underset{\{u\mid (u,v)\in E\}}{\mathrm{MIN}}\left(w_i(r,u)+w(u,v)\right)$$

מאידך:

$$\frac{w'_n(r,v)-w'_k(r,v)}{n-k}=\frac{w_n(r,v)+n\alpha-w_k(r,v)-k\alpha}{n-k}$$

$$=\frac{w_n(r,v)-w_k(r,v)}{n-k}+\alpha$$

לכן אם $\alpha=-\hat{A}$ נקבל

$$\underset{v}{\mathrm{MIN}}\ \underset{0\le k<n}{\mathrm{MAX}}\ \frac{w_n(r,v)-w_k(r,v)}{n-k}$$

$$=\underset{v}{\mathrm{MIN}}\ \underset{0\le k<n}{\mathrm{MAX}}\left(\frac{w'_n(r,v)-w'_k(r,v)}{n-k}\right)+\hat{A}$$

$$=0+\hat{A}=\hat{A}.$$

הוכחה: נפעיל את הרדוקציה $\hat{A}\neq 0 \rightsquigarrow \hat{A}=0$.

כלומר, מעגל קריטי אמ"מ קריטי אחרי הרדוקציה.

בהוכחת האלג׳ הראנו שהמסלול P מקיים $w'(P)=w'^*(r,v)$. (**)

יהי $C\subseteq P$ מעגל פשוט.

אם $w'(C)>0$, אז $P\setminus C$ יותר קל:

$$w'(P\setminus C)<w'(P)=w'^*(r,v)$$

בסתירה ל (**).

אם $w'(C)<0$, אז $\hat{A}'<0$, וסתירה.

ולכן $w'(C)=0 \Rightarrow A'(C)=0 \Rightarrow A(C)=\hat{A}$, כנדרש.

כדי לחשב w_{i+1} מספיק לעבור סריקה על כל הקשתות.

לכן זמן מילוי הטבלה $O(m\cdot n)$.

(וזמן זה שולט גם על זמן הריצה הכללי).

איך מחלצים מעגל קריטי?

נניח שיודעים לחלץ מסלול P באורך n שמקיים $w_n(r,v)=P$.

יהי v צומת שמקיים

$$\hat{A}=\underset{0\le k<n}{\max}\ \frac{w_n(r,v)-w_k(r-v)}{n-k}$$

טענה: יהי P מסלול באורך n שמקיים $w_n(r,v)=w(P)$.
כל מעגל פשוט ב-P הוא קריטי.