

28/2/08

אלגוריתמים בהשלמה

מציאת שיבוק מקסימלי (השלמה) בגרף כפרי

העברה: יהי  $M$  שיבוק. מסלול  $p$  נקרא **מסלול היתרה**

אם הוא מקיים:

$$p = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} v_2 \dots \xrightarrow{e_k} v_k \quad (*)$$

כל קשת שניה באורך  $p$  שיבת  $M$ .

הקשת הכאשנה והאתיונה ב  $p$  אינן ב  $M$ .

מסלול היתרה: ① אורך אצוץ

② מתחיל ונגמר בצומת השולף.

③ הבייתה:

$$M \leftarrow (M \setminus E(p_{\text{even}})) \cup E(p_{\text{odd}})$$

מגבירה את  $M$  בקשת אחת.

מסקנה: אם  $p$  מסלול היתרה ביחס לשיבוק  $M$ ,

אזי  $M \oplus E(p)$  הוא שיבוק בגודל  $|M|+1$ .

הוכחה:  $p$  מסלול באורך אצוץ, (הקשתות הולגות שלו

$$|M \oplus E(p)| = |M|+1, \text{ ונסן } M >$$

כלת נראה  $M' \triangleq M \oplus E(p)$  שיבוק.

$$M \oplus E(p) = (M \setminus E(p)) \cup (E(p) \setminus M)$$

אם  $e_1, e_2 \in M'$  חולקות צומת אז נחלק למקרים:

$$e_1, e_2 \in M \setminus E(p) \quad ①$$

$$e_1, e_2 \in E(p) \setminus M \quad ②$$

$$e_1 \in M \setminus E(p) \text{ \& } e_2 \in E(p) \setminus M \quad ③$$

ובכל המקרים נקרא סתירה.

מסע (Berge, Norman & Rabin):

$M$  שיבוק מירי. אם  $S$  קיים מסלול היתרה ביחס ל  $M$ .

הוכחה: ( $\Leftarrow$ ) אם קיים מסלול היתרה, אז ראין  $M$  לא מירי.

( $\Rightarrow$ ) אם  $M$  לא מירי, יהי  $M^*$  שיבוק מירי.  $|M^*| > |M|$ .

כתי נשמע  $M^*$  למצבת מסלול היתרה.

נבואו בקשתות הברזם הסמטי:  $D = M \oplus M^*$

כל צומת נשמך על עבר היתר 2 קשתות  $D$ , נוסך

הגרם המושבה  $D$  מקיים: כל ריב קשירות הוא

מסלול או מעגל. אם מסלול/מעגל הוא מתחלף.

מאכל  $D \subseteq p$  נקרא  $|M \cap p| = |M^* \cap p|$ .

מכאן שקיים מסלול  $D \subseteq p$  אכילו  $|M \cap p| < |M^* \cap p|$ .

8

8

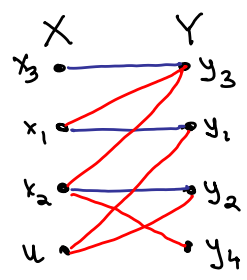
**נסקופית:**

① דבר שצריך  $M$ , קיים שיצק מיהי  $M^*$  המקיים  
 $v$  לא חסר ביהם  $v \leftarrow M$   $v$  לא חסר ביהם  $M^*$ .

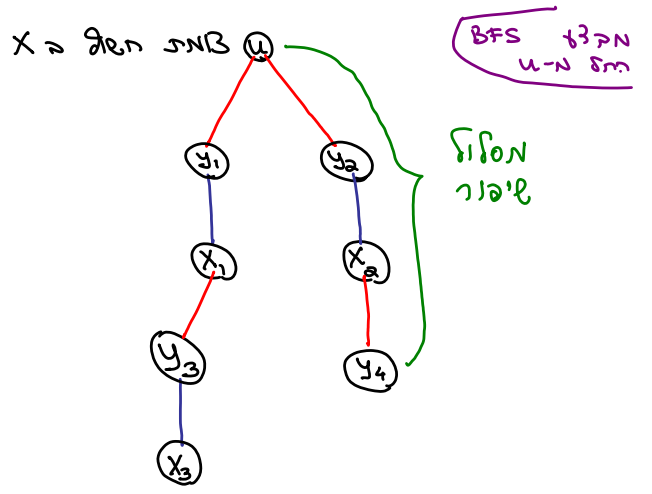
② אם יוצר דמיון מסלול החתכה, אז יוצר  
 דמיון שיצק מקסימלי.

[אחי כל מסלול החתכה השיצק אורך  $1$ , ומה הקשרות  
 השיצק חסר  $\frac{n}{2}$ ].

לדבר דברים נוספים - נוספים (המקרה הקטן).



קשת  $M$  (blue line)  
 קשת  $M^*$  (red line)



מקבל BFS מ- $u$

מסלול שיפור

שורה: צומת חסר  $x$

שכבות מתחלפות: אבן / כחול (דא השיצק/ השיצוק)  
 דא סוגר מסלול: מסלול צמית שבר ביקרנו בהם.

- אם גיבול על מניצ דמיון חסר  $Y$ , אז  
 מצאנו מסלול שיפור.

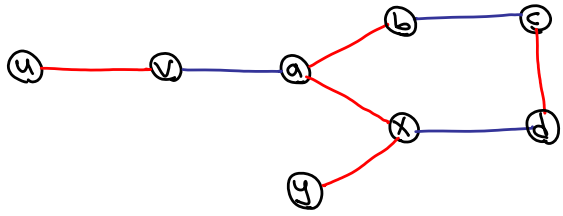
- אם גיבול על לוצר באר כל העלים דא חסרים (כא)  
 אז אלה דמיון חסר שרם ביקרנו בו.

על הולכי: על מתחיל מקסימלי ש שיהי חסר  
 וכל העלים דא חסרים.

- טענה: אם כל העצים הולכים, סל  $M$  שיצוק מקסימלי.

(כבר על הולכי: כמו בציורים = שיצוק, וזמן זה לא מובנה)  
 מה הקשר דאדע' של Ford & Fulk? ?

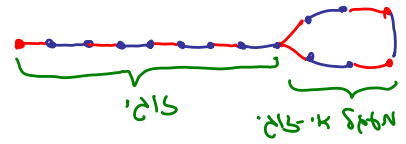
מה קרה בחרם שאינו נוספים?



- ראיתי לראש קשת  $d$  בין  $a$  ו- $c$  באותה  
 שכבה של העל. (וזה לא מותר כי ביקרנו בקצה השני)

- דמיון מסלול החתכה:  $u-v-a-b-c-d-x-y$

מקרה הקול:



$G|_B$ : הגרף המתקבל מ-G כיול  $B$ .

משפט Edmonds:

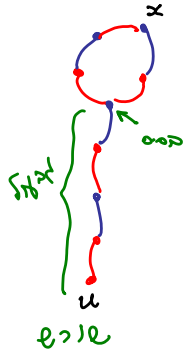
יהי  $M$  שיצק ב  $G$  ו- $B$  בסיסה ב  $M$ .  
 קיים מסלול הכתבה ב  $G$  ביחס  $M$  שלפני  
 קיים מסלול הכתבה ב  $G|_B$  ביחס  $M \setminus B$ .

טענה נוספת:

קיים מסלול באורך  $|V|$  מהשורש  $u$  לכל צומת ב  $G$  הניתנה.

מסלול זה מכיל את כל צמתיהן של  $M$ .

התצורה: יהי  $M$  שיצק ו- $u$  צומת השורש.



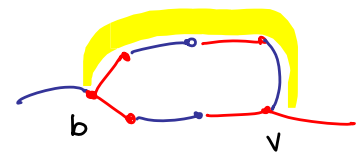
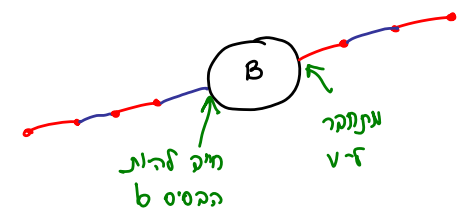
**פרח** flower  
 איחוד של 2 מסלולים מתחלפים  $P_1, P_2$   
 $M$  ו- $x$  כאשר  $|P_1|$  זוגי,  $|P_2|$  אי-זוגי.  
 (קלט ראשוני ב  $u$  וב  $x$  לא בשינוי!)

**אצטרוב** stem  
 הרישא המקסימלית המסתיימת ב  $P_1, P_2$

**בסיס** base  
 הצומת הראשון של  $P_1, P_2$  מתבצלים.

**פרחית** blossom  
 המזלג האי-זוגי  $P_1 \oplus P_2$ .

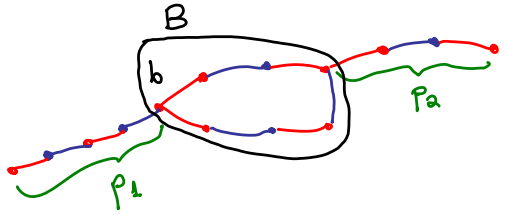
אם  $q$  מסלול הכתבה ב  $G|_B$  ביחס  $M \setminus B$  אז



הצורה המשפטה:

נפרד בהוכחה שאם  $q$  מסלול הכתבה ב  $G|_B$  ביחס  $M \setminus B$ , אז קיים מסלול הכתבה ב  $G$  ביחס  $M$ .

אם  $q$  אינו חודף צינור הצומת שמתקבל מכיוון  $B$ , אז  $q$  הוא מסלול המכיל את  $G$ .



מרכיבי האלץ

① אם אין מסלול היחידה האחרים ב-u בים  $\leq M$ ,  
ואם ק מסלול היחידה כלשהו, אז אם ב  $M \leq \text{cost}$  אין  
מסלול היחידה האחרים ב-u.

② אם קמהק האלץ אין מסלול היחידה האחרים ב-u  
אז קיים שבנק מקום שבו u חשוף.

- ③ מבנה נתונים: ①  $u \rightarrow v$  label(v) = u
- ② האם בקירט ב v : seen(v) ?
- ② האם v-s יש לך חשוף : exposed(v)
- שכן v שהם חשופים.

על כיתה  $\sqrt{B}$  נתון מיגד:  
 \* ב-לם הצמת האכולף.  
 \* על צמת ב B נסמן blossom(v) = b  
 \* צב-צקף על האלץ.

כיוון כיתה מצייק: החלפת צמת B ב-b בעל  
מבנה הצפונים שממשים בצורק בניית "הלצים".