אלגוריתמים ברשתות - תרגיל בית 5

הגשת פתרונות: יום ד' 2/4/08

① הוכיחו שלמערכת משוואות $Ax=b$ קיים פתרון אם"ם לא קיים y עבורו $y^tA=0$ וכן $y^tb=-1$.

② משפט Carathéodory: יהיו $A_1 \dots A_n$ וקטורים ב $\mathbb{R}^m$. החרוט שנוצר ע"י $\{A_i\}_{i=1}^m$ מוגדר ע"י

$$C \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0 \right\}$$

הוכיחו שכל $y \in C$ ניתן לייצוג ע"י סכום של של לכל היותר m וקטורים בקבוצה $\{A_i\}_{i=1}^n$ כאשר כל המקדמים חיוביים.

נגדיר $P \triangleq \text{convex-hull}(A_1, \dots, A_n)$.

הוכיחו שכל $y \in P$ ניתן לייצוג כסכום קמור של לכל היותר $m+1$ וקטורים ב $\{A_i\}_{i=1}^n$.

רמז: השתמשו בפולידרון $\{\lambda \mid \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = y\}$.

③ משפט Birkhoff:

מטריצה פרמוטציה: מטריצה $n \times n$ של רכיבים $0-1$, ובכל שורה ועמודה יש 1 בודד.

מטריצה בי-סטוכסטית: מטריצה $n \times n$ של רכיבים בקטע $[0,1]$, וסכום כל שורה וכל עמודה הוא 1.

הוכיחו: כל מטריצה בי-סטוכסטית היא צירוף קמור של מטריצות פרמוטציה.

(מה לגבי הכיוון השני?)

4) תהי $P: \min\{c^t x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ תוכנית לינארית פרימלית. כיתבו את התוכנית הדואלית D, והמירו אותה לתוכנית מינימיזציה שקולה P'.

מיצאו תנאים מספיקים (עבור A, b, c) כדי ש-P ו-P' יהיו תוכניות שקולות.

5) יענקל'ה קרא בעיתון העדה, כי פותח אלג' חדש לפתרון מערכות של אי-שוויונים.

יענקל'ה משער שניתן להפעיל אלג' זה פעם בודדת כדי לפתור תוכנית לינארית. עיזרו ליענקל'ה להוכיח או להפריך את השערתו.

6) קירובי צ'בישב: מטרתנו למצוא x ב-$\mathbb{R}^n$ שממזער את $\|Ax-b\|_\infty \triangleq \max_i |(Ax-b)_i|$.

נסמן $\alpha \triangleq \min\{\|Ax-b\|_\infty : x \in \mathbb{R}^n\}$

א) הראו כיצד למצוא x אופט'.

ב) הוכיחו שאם $\sum_{i=1}^{m} |p_i| < 1$ & $p^t A = 0$ אז $p^t b \leq \alpha$.

7) תהי Π תוכנית לינארית $\min\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

יהי הלגרנג'יאן $L(x,p) \triangleq c^t x + p^t(b - Ax)$.

2 שחקנים משחקים משחק:

שחקן 1 בוחר $x \geq 0$.

שחקן 2 בוחר p

שחקן 1 משלם לשחקן 2 $L(x,p)$.

(כמובן שחקן 1 רוצה לשלם כמה שפחות, ושחקן 2 רוצה לזכות בכמה שיותר).

זוג (x^*, p^*) נקרא שווי משקל Nash אם

$$\forall x \geq 0 \ \forall p : L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*)$$

הוכיחו: (x^*, p^*) הוא שווי משקל Nash אמ"מ x^* פתרון אופט' של Π ו-p^* פתרון אופט' של $\mathrm{dual}(\Pi)$.