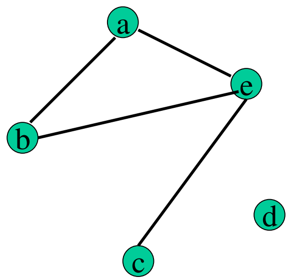
מבנה מחשבים

תרגול מספר 1

גרף לא מכוון

- גרף לא מכוון $G=(V,E)$ הנו זוג סדור של קבוצות.
- V הנה קבוצה של אלמנטים (קודקודים).
- E הנה קבוצה של זוגות **לא סדורים** של אלמנטים (קשתות).
- בדרך כלל נתאים לגרף את ההמחשה שבשקף הבא.
- הערה: כרגע נניח כי אין קשתות מקבילות.

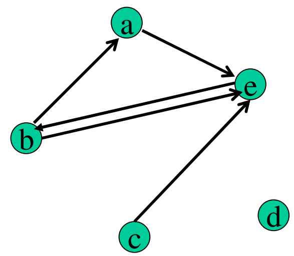
דוגמה לגרף לא מכוון



$V=\{a,b,c,d,e\}$ $E=\{(a,b), (b,e), (a,e), (e,c)\}$

גרף מכוון

- גרף מכוון הנו זוג סדור $G=(V,E)$, כאשר הקבוצה E היא קבוצה של זוגות סדורים.



$V=\{a,b,c,d,e\}$ $E=\{(b,a), (b,e), (e,b) (a,e), (e,c)\}$

מסלול ומעגל בגרף לא מכוון

- מסלול הנו סדרה של קודקודים, $v_0,v_1\ldots v_k$, כאשר לכל i קיימת הקשת (v_i,v_{i+1}).
- מעגל הנו מסלול עבורו $v_k = v_0$.
- מסלול פשוט הנו מסלול שבו אף קודקוד אינו חוזר יותר מפעם אחת.
- מעגל פשוט הנו מסלול פשוט עבורו $v_k = v_0$.

מסלול ומעגל בגרף מכוון

- ההגדרות שניתנו בשקף הקודם מתאימות גם לגרף מכוון, אם נחליף את המילה קשת, במילים קשת מכוונת.
- בגרף לא מכוון נגדיר כי המעגל $\{(a,b); (b,a)\}$ אינו פשוט.
- בגרף מכוון מעגל כזה (אם קיים) הנו פשוט.

טענה לדוגמא

- דרגתו של קודקוד הנה מספר הקשתות החלות בו.
- **טענה:** בגרף לא מכוון, מספר הקודקודים שדרגתם אי-זוגית הוא זוגי.
- **הוכחה:**
  - יהי S סכום דרגות הקודקודים. נשים לב כי ב-S ספרנו כל קשת פעמיים (פעם בכל קצה) ← S זוגי.
  - יהי S_1 סכום הדרגות של קודקודים שדרגתם זוגית, ו- S_2 סכום הדרגות של קודקודים שדרגתם אי-זוגית.

טענה לדוגמא - המשך

- ← $S - S_1 = S_2$. אך כיוון ששני המספרים בצד שמאל של השוויון זוגיים, הרי גם המספר בצד שמאל של השוויון זוגי.
- ← S_2 חייב להכיל מספר זוגי של מחוברים כיוון שכל אחד מהמחוברים בו הוא אי-זוגי. והטענה הוכחה.

עץ לא מכוון

- גרף ייקרא קשיר אם בין כל זוג קודקודים יש מסלול.
- עץ הנו גרף קשיר וחסר מעגלים.
- מספר הקשתות בעץ שווה למספר הקודקודים פחות 1.
- עלה בעץ הנו קודקוד שדרגתו 1.
- כל הוספה של קשת לעץ תסגור מעגל.
- כל הורדה של קשת מהעץ תנתק אותו.

עץ מושרש

- עץ מושרש הנו עץ, וצומת מיוחד בו שיקרא השורש.
- בעץ מושרש נוסיף כיוון לקשתות באופן רקורסיבי לפי הכלל הבא:
  - דרגת הכניסה של השורש היא 0.
  - דרגת הכניסה של כל צומת אחר היא 1.
- מספר העלים בעץ מכוון שווה למספרם בעץ המקורי אולי פחות 1 (אם דרגת השורש שנבחר היתה 1).

משפחות מיוחדות נוספות של גרפים

- גרף דו-צדדי הינו גרף לא מכוון עבורו קיימת חלוקה של הקודקודים לשתי קבוצות V_1,V_2 כך שכל קשת בגרף הנה מהצורה $(u_1,u_2);\ u_1 \in V_1,\ u_2 \in V_2$.
- גרף מכוון חסר מעגלים הנו גרף מכוון שאינו מכיל מעגל מכוון (מבנה כזה הוא "הרחבה" של מושג העץ).

אינדוקציה – הגדרה מאוד לא פורמלית

- אינדוקציה הנה צורת הוכחה שבה אנו בודקים את כל המקרים האפשריים.
- דרך ההוכחה היא בדיקת אוסף של מבני יסוד (אולי מבנה אחד ואולי יותר), ולאחר מכן בדיקה כי כל מבנה נוסף גם הוא נכון, על-ידי שימוש בתת-מבנים עבורם הטענה נכונה.
- שימו לב כי לצורך כך הנחנו סדר (Well ordered,לא סתם סדר!!) על המבנים.

טענה (להדגמת אינדוקציה)

- משפט מנטל: כל גרף לא מכוון המכיל 2n צמתים, ולפחות n^2+1 קשתות, מכיל משולש.
- הוכחה: באינדוקציה על n, גודל הגרף.
- בסיס: n=1, הטענה ריקה ולכן טריוויאלית נכונה.
- הערה: אילו היינו רוצים לבחור את n=2 לבסיס, היה עלינו לבדוק כי כל גרף לא מכוון המכיל 4 צמתים ולפחות 5 קשתות מכיל משולש. (שימו לב: כל גרף)

המשך הטענה (להדגמת אינדוקציה)

- הנחה: נניח כי כל גרף עם 2n צמתים, ולפחות n^2+1 קשתות מכיל משולש.
- צעד: נוכיח כי כל גרף עם 2(n+1) צמתים, ולפחות $(n+1)^2+1$ קשתות מכיל משולש.
- יהי G גרף כנ"ל, אזי קיימות בו קשתות, ועל כן קיימים u,v שכנים ב- G.
- נוריד מהגרף את u,v (יחד עם כל הקשתות שנגעו בהם). הגרף החדש שנתקבל יסומן ב- G'=(V',E').

המשך הטענה (להדגמת אינדוקציה)

- $|V'| = 2n$, $|E'| \geq (n+1)^2+1 - d(u) - d(v)+1$.
- כעת נחלק למקרים:
  - אם יש ל-u ו-v שכן משותף – סיימנו (שכן יש משולש יחד עם הקשת (u,v).
  - אחרת, מתקיים: $d(u)+d(v)-2 <= 2n$, ולכן:

$$|E'| \geq (n+1)^2+1-[d(u)+d(v)-1] \geq$$
$$n^2+2n+1+1-[2n+1] \geq$$
$$n^2+1$$

מ.ש.ל