מבוא למחשבים ספרתיים - אביב 2002

תרגיל בית מספר 2

תאריך הגשה: 29/4/02

1. שאלה זו עוסקת במעגלים מונוטוניים. לשם כך נעזר בהגדרות:
   - **פונקציה בוליאנית** $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ **היא מונוטונית** אם היא מקיימת:
     $\forall i. x_i \geq x'_i \Rightarrow f(x) \geq f(x')$
     כלומר אם כל הביטים של וקטור מסוים (X) גדולים או שווים לביטים התואמים בווקטור אחר (X'), אז מוצא פונקציה מונוטונית המופעלת על X חייב להיות גדול או שווה למוצא של אותה פונקציה המופעלת על X'.
   - **פונקציה בוליאנית** $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ **היא מונוטונית** אם היא מקיימת את הנ"ל עבור כל אחד מהביטים במוצא.
   - **מעגל צירופי הוא מונוטוני** אם הוא מממש פונקציה מונוטונית.

   א. רשמו את כל הפונקציות המונוטוניות $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$. מהם השערים המתאימים?
   ב. הוכיחו שכל מעגל המכיל אך ורק שערים מונוטוניים הוא מונוטוני.
   ג. בהינתן מעגל מונוטוני, כיצד נבדוק בדרך הפשוטה ביותר, אם מוצא המעגל הוא קבוע לכל כניסה שהיא?

2. כתבו אלגוריתם רקורסיבי, אשר בהינתן מעגל צירופי חוקי, מחשב את ה propagation delay של המעגל. הוכיחו נכונות וחשבו סיבוכיות.

3. הוכיחו שלכל OR-tree יש את אותה עלות. הניחו שכל ביט בכניסה מחובר לשער אחד בלבד, ושכל השערים במעגל הם שערי OR פשוטים.

4. שאלת נסו ותלמדו: בגיליונות אלקטרוניים (כמו Excel), ניתן לממש פונקציות בוליאניות באופן דומה לבניית מעגל צירופי. כיצד הגיליונות מוודאים את חוקיות הפונקציה? נסו ליצור פונקציות לא חוקיות ובדקו כיצד הגיליון האלקטרוני מונע זאת.

5. שאלה המבוססת על חידה שתורגמה לבינארית:
בנו מעגל צירופי בעל הכניסות x[n-1:0] , והיציאות y[n-1:0].
כל יציאה y[i] היא יציאה של בלוק שכניסותיו הן: כל הוקטור y מלבד y[i], וכל הכניסות בעלות אינדקס נמוך יותר כלומר x[i-1:0].

בכתיבה פורמלית: y[i]=f(y[n-1:i+1], y[i-1:0],x[i-1:0])

המעגל אמור להביא למקסימום את מספר המוצאים הזהים לכניסות, כלומר:
עבור כמה שיותר אינדקסים i, נרצה שיתקיים: y[i] = x[i].

דוגמה לפתרון שאינו מגיע למקסימום הנדרש: y[1] = x[0], y[0]=y[1];
y[2]=y[3],y[3]=x[2];.... כך נגיע למחצית מהמוצאים שיהיו זהים לכניסות.

תארו את המעגל, הוכיחו את נכונותו, וחשבו את עלותו ואת ה propagation delay.

הוכיחו שלא יכול להיות מעגל יותר טוב מבחינת מספר השוויונות.

וזיכרו: יש רק 10 סוגי אנשים בעולם – אלו שמבינים בינארית, ואלו שלא.