פתרון תרגיל בית 4

שאלה 2

משפט 1 לכל רשת משוויים N ולכל פונקציה מונוטונית f מתקיים

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \quad \vec{f}(N(v)) = N(\vec{f}(v))$$

<u>הוכחה:</u> נבצע מיון טופולוגי של המשוויים:

$$c_1, c_2, \ldots, c_k$$

כאשר אם יש מסלול מכוון N c_i ל c_j אז $i<j$.

כעת נספר גם את הקשתות לפי המיון הטופולוגי:

$$e_1, e_2, \ldots, e_{k'} \qquad (k' = n + 2k)$$

כלומר: אם יש מסלול שבו e_i מופיעה לפני e_j, אזי $i<j$.

לכל קשת e_i נגדיר $N_{e_i}(v) =$ הערך של e_i ביחס לקלט v

נוכיח באינדוקציה על e_i: $f(N_{e_i}(v)) = N_{e_i}(\vec{f}(v))$.

ההוכחה באינדוקציה על i.

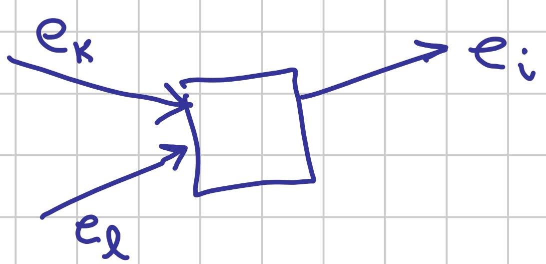
עבור $i=1$, e_i היא קלט ולכן $N_{e_i}(v) = v_{\hat{i}}$.

$$\Rightarrow f(N_{e_i}(v)) = f(v_{\hat{i}})$$

$$N_{e_i}(\vec{f}(v)) = \vec{f}(v)_{\hat{i}} = f(v_{\hat{i}}).$$

(וכנ"ל עבור כל קשת שהיא קלט).

בשלב האינדוקציה



למשל, e_i מוצא max של משווה שמוזן ע"י e_k, e_l ($k,l<i$).

$$N_{e_i}(v) = \max\{N_{e_k}(v), N_{e_l}(v)\}$$

$$f(N_{e_i}(v)) = f(\max\{\quad\}) \underset{\uparrow}{=} \max\{f(N_{e_k}(v)), f(N_{e_l}(v))\}$$

f מונוטונית

ואזי

$$N_{e_i}(\vec{f}(v)) = \max\{N_{e_k}(\vec{f}(v)), N_{e_\ell}(\vec{f}(v))\}$$

ולכן לפי ה"א

$$N_{e_k}(\vec{f}(v)) = f(N_{e_k}(v))$$

$$N_{e_\ell}(\vec{f}(v)) = f(N_{e_\ell}(v))$$

ולכן $N_{e_i}(\vec{f}(v)) = f(N_{e_i}(v))$, כנדרש.

עקרון 0-1 עבור מיון

נאמר שוקטור V הוא ממוין-2 אם $V = \alpha \circ \beta$ כאשר $|\alpha| = |\beta|$ וכן α, β ממוינים (בסדר עולה).

למה 2: V הוא ממוין-2 אמ"מ לכל $f: \mathbb{R} \to \{0,1\}$ מונוטונית מתקיים $\vec{f}(V)$ ממוין-2.

הוכחה: $\Leftarrow$ קל (כי α ממוין $\Leftarrow$ $f(\alpha) \in 0^* 1^*$, ולכן ממוין).

$\Rightarrow$ אם V לא ממוין-2, למשל $V = \alpha \circ \beta$ כאשר $|\alpha| \neq |\beta|$

וכן α לא ממוין. לכן יש 2 אינדקסים $i<j$ עבורם $\alpha_i > \alpha_j$. ואז נגדיר פונקציה f_{α_j}. $\left(f_{\alpha_j}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le \alpha_j \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases}\right)$

נקבל $\vec{f}_{\alpha_j}(\alpha)$ מכילה תת מחרוזת $\underset{i}{1} \cdots \underset{j}{0}$ $\Leftarrow$ $\vec{f}(\alpha)$ לא ממוין.

הערה: למה 2 היא הרחבה פשוטה של הלמה עבור

v נקרא ממויין $\Longleftrightarrow$ $f(v)$ ממויין לכל פונק' סף f.

<u>למה 3</u> N רשת מיזוג אמ"מ $N(v)$ ממויין לכל וקטור $v\in\{0,1\}^{2n}$

שהוא 2-ממויין.

<u>הוכחה:</u> $(\Leftarrow)$ נובע מההגדרה.

$(\Rightarrow)$ אם N לא ממזגת, נניח $N(v)$ לא ממויין עבור

v שהוא 2-ממויין. משמע יש פונקצית סף f עבורו

$\vec{f}(N(v))$ לא ממויין.

אבל לפי משפט 1: $\vec{f}(N(v)) = N(\vec{f}(v))$.

אבל $\vec{f}(v)$ 2-ממויין, ולכן N נכשלת במיזוג $\vec{f}(v)\in\{0,1\}^{2n}$.

ומה עושים במקרה של מיזוג ביטוני?

למה ב': v ביטוני $\Longleftrightarrow$ לכל פונ' A_0 $f(v)$ ביטוני.

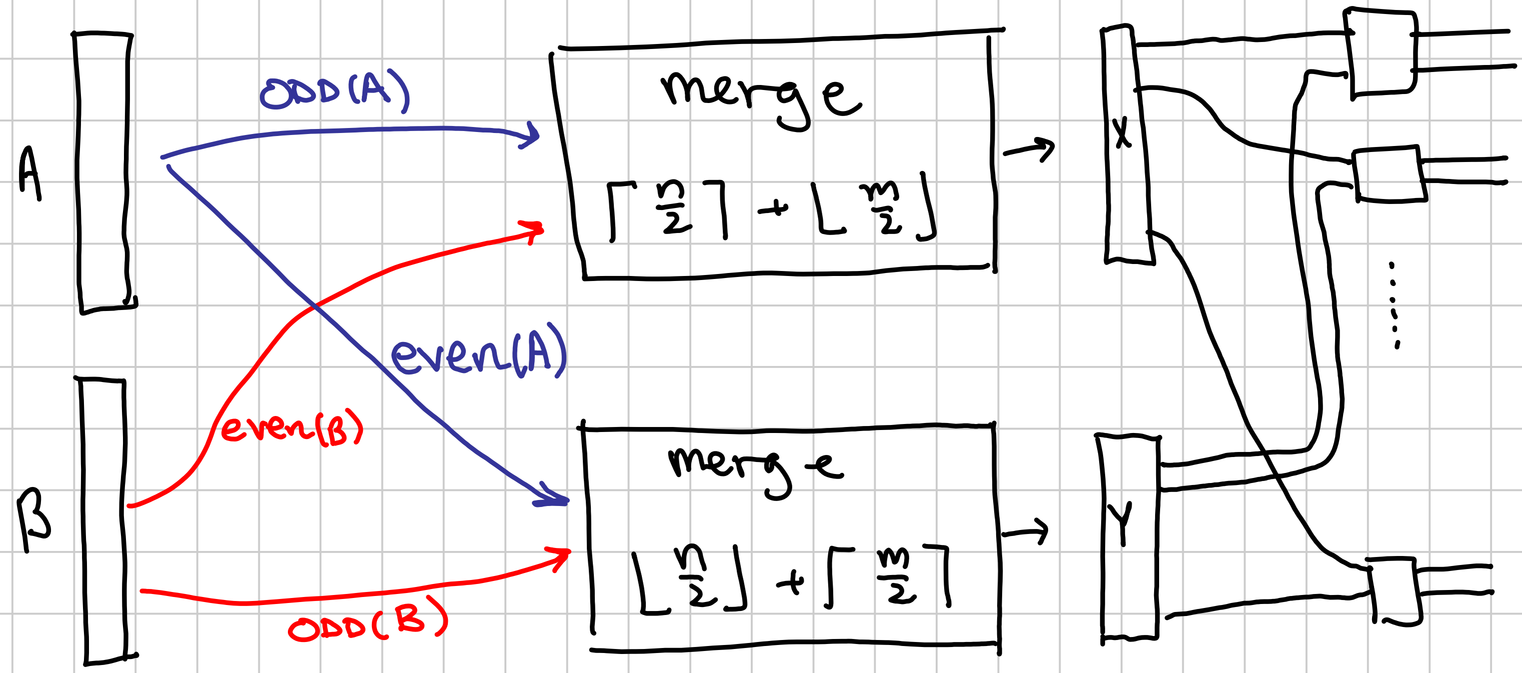
למה ג': N רשת מיזוג ביטוני אמ"מ ממיינת כל וקטור בינארי שהוא ביטוני.

הוכחת ב': ראינו כבר: v ביטוני $\Longleftrightarrow$ לכל f, קב' האפסים ב $f(v)$ רצופה ציקלית. ולכן:

v לא ביטוני $\Rightarrow$ $f(v)$ מכילה $1\cdots0\cdots1\cdots0\cdots$ או $1\cdots0\cdots1\cdots0\cdots$

$\Rightarrow$ $f(v)$ לא ביטוני.

שאלה 3



אם $|X| \neq |Y|$ אז האחרון בארוך יותר
מנותב ישירות לפלט האחרון.

<u>הסבר:</u>

כמובן $-1 \le |X|-|Y| \le 1$

אם

$$A = 0^{a} \cdot 1^{n-a}$$

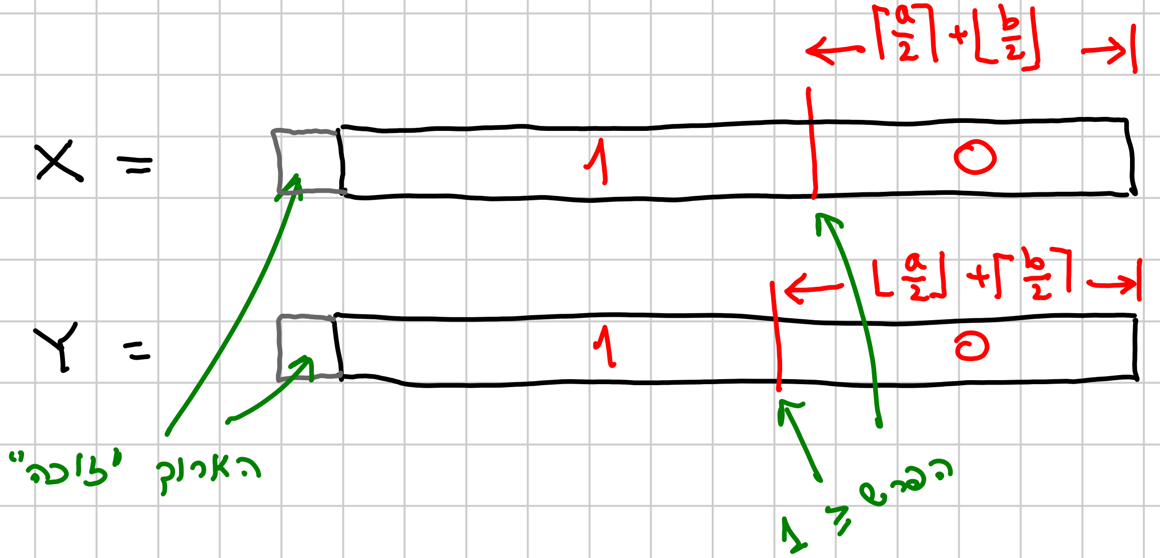
$$B = 0^{b} \cdot 1^{m-b}$$

אז

$$X = 0^{\lceil \frac{a}{2} \rceil + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor} \cdot 1^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - (\dots)}$$

$$Y = 0^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lceil \frac{b}{2} \rceil} \cdot 1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{m}{2} \rceil - (\dots)}$$

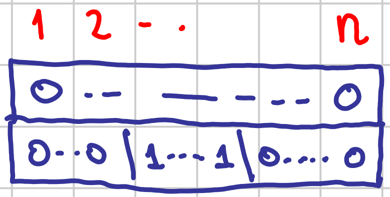
ולכן



שאלה 4

$\vec{x}$ הוא מהצורה $0^*1^*0^*$ או $1^*0^*1^*$.

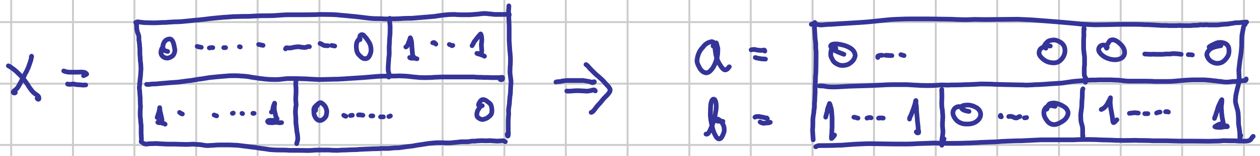
(I) אם $x = 0^{\alpha} \cdot 1^{\beta} \cdot 0^{\gamma}$.



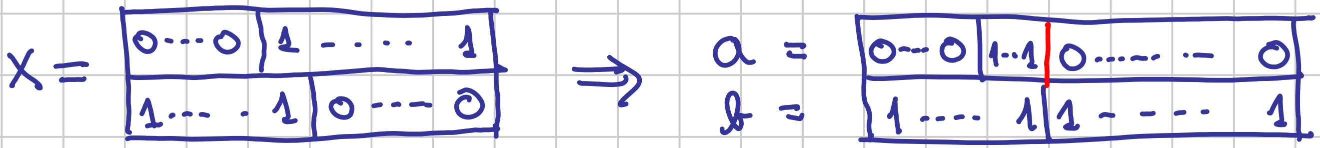
(1) $\alpha \geq n \Leftarrow \vec{a} = 0^{n}$

וכן $\vec{b} = 0^{n-(\beta+\gamma)} \cdot 1^{\beta} \cdot 0^{\gamma}$

(2) $\alpha + \gamma \geq n$



(3) $\alpha + \gamma < n$ $(\Leftarrow n < \beta)$



$$x = 1^{\alpha} 0^{\beta} 1^{\gamma} \qquad \text{s/c} \quad (\mathrm{II})$$

$$\alpha + \gamma \geq n \qquad (1)$$

$$x = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 \cdots 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \cdots 1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \end{array} \\ b = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 \cdots 1 & 1 \cdots 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$(n < \beta) \qquad \alpha + \gamma < n \qquad (2)$$

$$x = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 \cdot 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \cdots 1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \hline \end{array} \\ b = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 11 \cdots 1 & 0 & 1 \cdots 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$