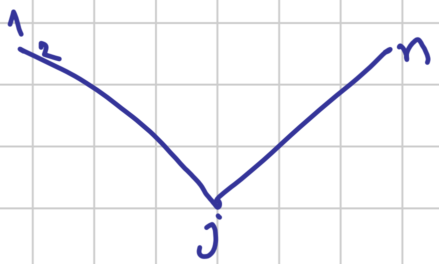
סדרה ביטונית bitonic sequence

סדרה $X=\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ היא ביטונית במובן הצר אם



קיים $1 \le j \le n$ כך ש:

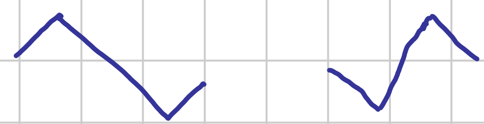
① $\{x_i\}_{i=0}^{j}$ היא סדרה עולה

② $\{x_i\}_{i=j+1}^{n-1}$ היא סדרה יורדת

סדרה $X=\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ היא ביטונית אם היא מתקבלת מהזזה ציקלית של סדרה ביטונית במובן הצר.

כלומר: ① $\exists j : \forall i : X_{(i+j) \bmod n} = Y_i$

② $y=\{y_i\}_{i=0}^{n-1}$ היא ביטונית במובן הצר.



<u>תרגיל</u>: הוכח ששירשור של סדרה עולה עם סדרה יורדת

נתון סדרה ביטונית: $\wedge$.

C: סדרה $x=\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ היא ביטונית אמ"מ לכל t,

קבוצת האינדקסים $\{j \mid x_j \le t\}$ היא רציפה ציקלית,

כלומר: נגדיר $f_t(x_i)=\begin{cases}0 & \text{if } x_i \le t\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$

אז $f_t(x)$ מהצורה $0^*\cdot1^*\cdot0^*$ או $1^*\cdot0^*\cdot1^*$.

<u>הוכחה</u>: $(\Leftarrow)$ נניח את x כך $\tilde{x}=y\circ z$ עבור y היא עולה, z היא יורדת.

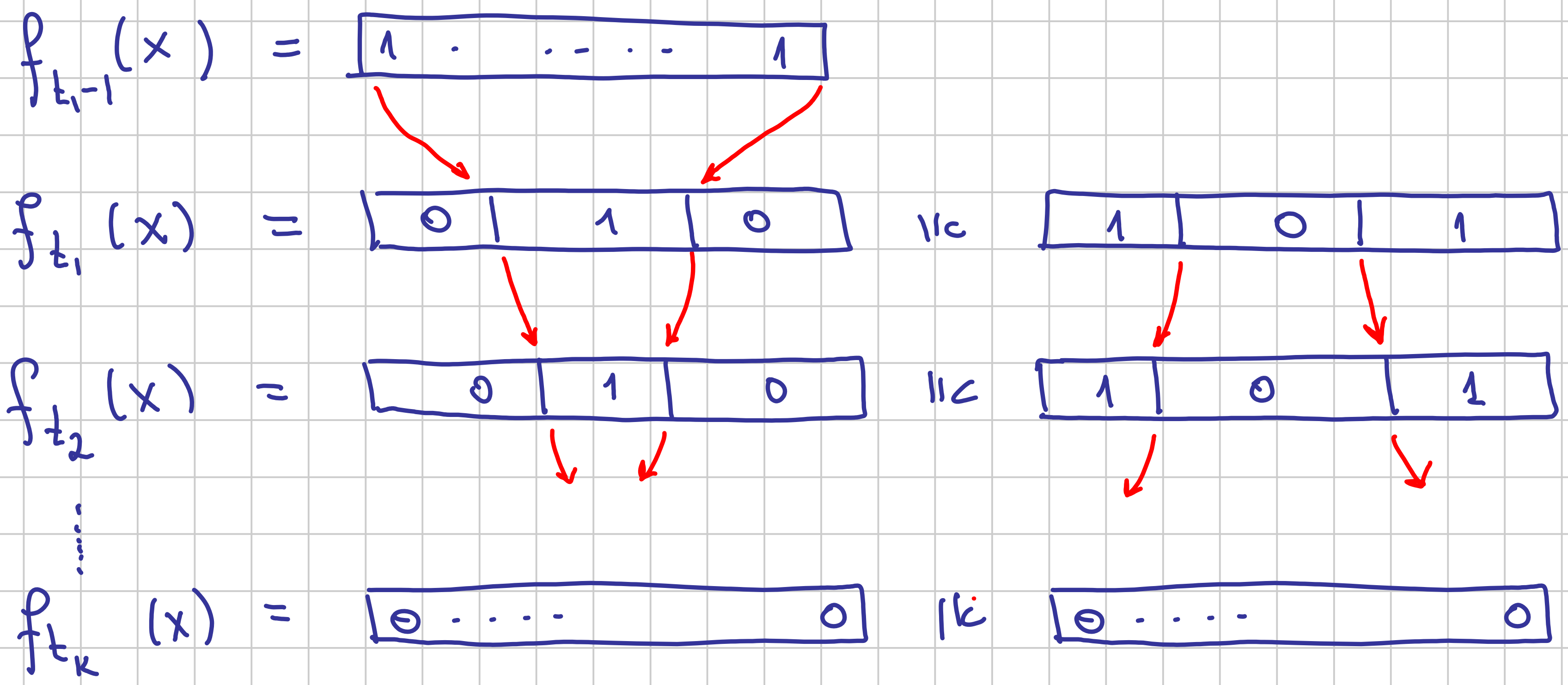
לכל t: $f_t(y)=1^*\cdot0^*$, $f_t(z)=0^*\cdot1^*$ ולכן $f_t(\tilde{x})=1^*0^*1^*$.

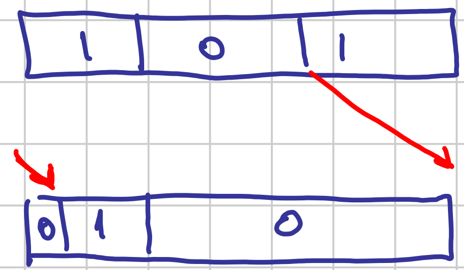
ולכן גם ב $f_t(x)$ ה-0 נשארים רצופים ציקלית.

(⇒) מיין את שלבי x ונסמן ב- $t_1 < t_2 \; \cdots \; < t_k$

אלה השלבים השונים המעניינים.

אז





לשים לב! יתכן "מעבר".

כדי לפשט את ההוכחה נבצע מראש הזזה ציקלית שגורמת
לאיבר השמאלי ביותר להיות מינימום.

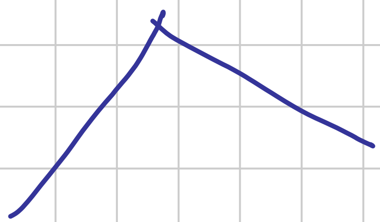
$\Leftarrow$ בה"כ $x_1 = \min\{x_i\}_{i=1}^{n}$.

כמובן x ביטונית אם"ם כל הזזה ציקלית שלה ביטונית,
וכנ"ל לגבי התנאי לגבי הרציפות הציקלית של האפסים ב $f_t(x)$.

$$f_{t_{i+1}}(x) = \boxed{1 \; 1 \; \cdots\cdots \; 1 \; 1}$$

$$f_{t_1}(x) = \boxed{0 \cdots 0 \,|\, 1 \; 1 \cdots \; 1}$$

$$f_{t_2}(x) = \boxed{0 \cdots 0 \,|\, 1 \cdots 1 \,|\, 0 \cdot 0}$$

$\Longrightarrow x =$ 

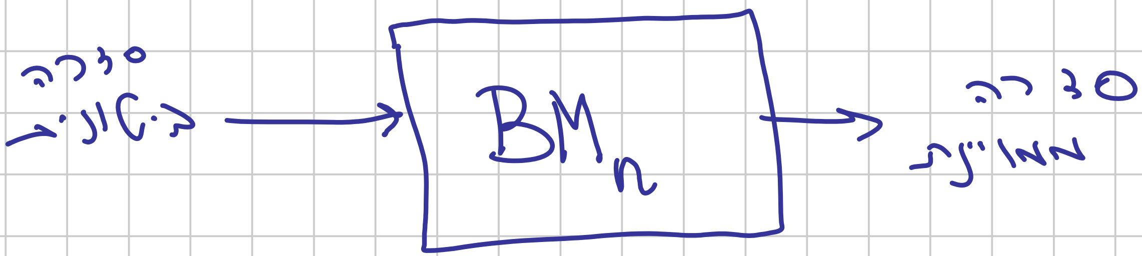
כנדרש!

מיזוג ביטוני Bitonic Merge

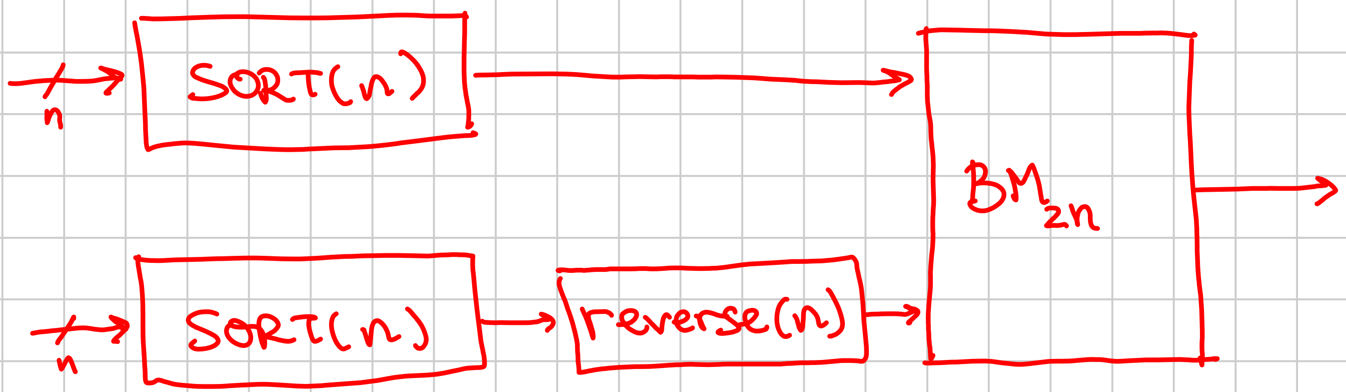
BM_n :

קלט: סדרה ביטונית X מאורך n

פלט: הסדרה X בסדר ממוין.



למה מיזוג ביטוני שלנו?



הערה: reverse(n) היא קופסה "ריקה".

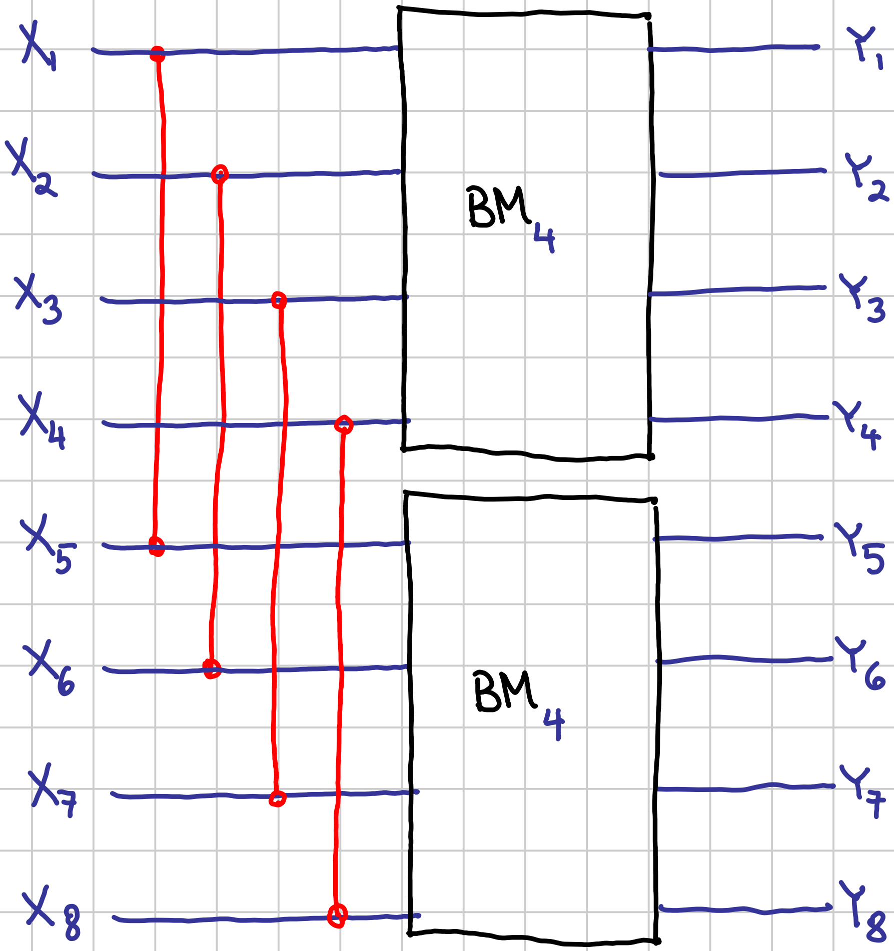
אינה מכילה שערים אלא ניתוב קבוע בלבד.

במובן של שלב כן מכילה שלב.

$$d(n) = d\left(\frac{n}{2}\right) + d(BM(n)) = d\left(\frac{n}{2}\right) + O(\lg n) = O(\lg^2 n)$$

$$c(n) = 2c\left(\frac{n}{2}\right) + c(BM(n)) = 2\cdot c\left(\frac{n}{2}\right) + O(n\lg n) = O(n\cdot\lg^2 n)$$

מיון של מיזוג ביטוני



פורמלית: בהינתן $x_1, \dots, x_{2n}$

נגדיר

$$A_i \triangleq \min\{x_i, x_{i+n}\}$$

$$B_i \triangleq \max\{x_i, x_{i+n}\}$$

ונפעיל

$$BM_n(A) \circ BM_n(B)$$

$$d(n) = 1 + d\left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow d(n) = O(\lg n)$$

$$c(n) = 2c\left(\frac{n}{2}\right) + n \Rightarrow c(n) = O(n \cdot \lg n)$$

$A_i \triangleq \min\{x_i, x_{i+n}\}$

$B_i \triangleq \max\{x_i, x_{i+n}\}$

נכונות

טענות עזר:

(1) B שולט על A.

(2) כ"א מן הסדרות A , B ביטונית.

נמיר את 2 הטענות בלמה הבאה

<u>למה:</u> תהי M מטריצה $2\times n$.

$$M = \begin{bmatrix} & & & \cdots & \\ & & & \cdots & \end{bmatrix}$$

נניח $Row_1(M) \circ Row_2(M)$ ביטונית.

תהי $\hat{M}$ המטריצה המתקבלת ע"י מיון כל עמודה של M

$$\hat{M}_{1,k} = \min\{M_{1,k}, M_{2,k}\} \qquad \hat{M}_{2,k} = \max\{M_{1,k}, M_{2,k}\}$$

אז (1) $Row_2(\hat{M})$ שולטת על $Row_1(\hat{M})$.

(2) כל שורה של $\hat{M}$ היא ביטונית.

<u>**הוכחה:**</u> נניח שכל איברי M שונים. נבחר סף t המתאים לתנאי ההתחלתי. כלומר $L \triangleq \{M_{ij} \mid M_{ij} \leq t\}$ מקיימת $|L| = \frac{n}{2}$.

אז איברי L מופיעים ברציפות ציקלית בשירשור שורות M.

וכל עמודה של M מכילה בדיוק איבר אחד מ L.

$\Longleftarrow$ $Row_1(\hat{M}) = L$ ולכן $Row_2(\hat{M}) = M \setminus L$.

כמו-כן כיון ש L מופיע ברציפות ציקלית בשירשור שורות M, הרי שאיברי L מופיעים ב $Row_1(\hat{M})$ באותו סדר ציקלי כפי שהם מופיעים בשירשור שורות M.

תרגיל: הוכיחו את כללות העזר תוך שימוש בעיקרון 0-1.