חילוק A/B

① $r \leftarrow \frac{1}{B}$ (הפכי)

② $q \leftarrow r \cdot B$ (כפל)

<u>בעיה:</u> אין ל $\frac{1}{B}$ ול $\frac{A}{B}$ יצוג בעזרת n סיביות (n אורך המילה).

⇐ מסתפקים בפתרון מקורב: $\left| \frac{A}{B} - q \right| < 2^{-n}$.

הנחה מפשטת: $A,B \in [1,2)$

שיטה א': חיפוש בינארי

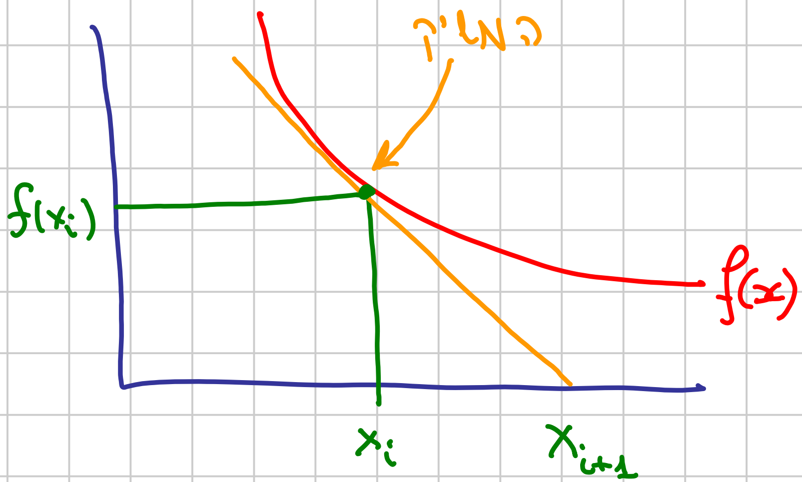
n צעדים. (n = מס' הספרות במנה)
בכל צעד מבצעים כפל והשוואה (חיסור).

שיטה ב': חילוק ארוך
n צעדים
בכל צעד מבצעים כפל של B בספרה של
המנה וחיסור.

שיטה ג׳ : ניוטון - רפסון

$$f(x) = \frac{1}{x} - B$$

מחפשים שורש של $f(x)$: $x = \frac{1}{B} \Leftarrow f(x)=0$.



$$f'(x_i) = \frac{0 - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$= x_i - \frac{1/x_i - B}{-1/x_i^2}$$

$$= x_i + x_i^2\left(\frac{1}{x_i} - B\right)$$

$$= x_i\left(2 - x_i B\right)$$

$\Leftarrow$ הכלל בכל איטרציה $X_{i+1} \leftarrow X_i(2 - X_i B)$

מהי השגיאה?

$$\delta_i \triangleq \frac{1}{B} - x_i$$

$$\delta_{i+1} = \frac{1}{B} - x_{i+1} = \frac{1}{B} - x_i(2 - Bx_i)$$

$$= B \cdot \left(\frac{1}{B^2} - 2x_i \frac{1}{B} + x_i^2 \right)$$

$$= B \left(\frac{1}{B} - x_i \right)^2 = B \cdot \delta_i^2 < 2 \cdot \delta_i^2$$

<u>מסקנה:</u> ① עבור $i \geq 1$ $0 < \delta_i$.

② שגיאה יורדת

$$\delta_k \leq 2^{1+2+2^2+\dots+2^{k-1}} \cdot \delta_0^{2^k}$$

$$= 2^{2^k-1} \delta_0^{2^k} = \frac{1}{2} (2\delta_0)^{2^k}$$

אם $|2\delta_0| \leq \frac{1}{2}$ אז מס' ספרות הדיוק "מוכפל" בכל איטרציה:

$\boxed{\text{הסבר}}$

$$\delta_{i+1} < 2\delta_i^2 \Rightarrow \frac{1}{\delta_{i+1}} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\delta_i^2}$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{1}{\delta_{i+1}} > -1 + 2\cdot\log_2 \frac{1}{\delta_i}$$

איך מחשבים x_0 כך ש $|\delta_0| \le \frac{1}{4}$?

<u>טענה:</u> אם $x_0 = \frac{3}{4}$ אז $\forall B\in[1,2)\ |\delta_0| \overset{\Delta}{=} \left|\frac{1}{B} - x_0\right| \le \frac{1}{4}$

<u>הוכחה:</u> $B\in[1,2)$

$\Downarrow$

$\frac{1}{B} \in (\frac{1}{2}, 1]$

$\Downarrow$

$\frac{3}{4}$ נק' "אמצע".

$$\left.\begin{aligned}\max_{B\in[1,2)} \frac{1}{B} - x_0 &\le 1 - x_0 = \frac{1}{4}\\ \min_{B\in[1,2)} \frac{1}{B} - x_0 &> \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}\end{aligned}\right\} \text{פורמלית}$$

מסקנה: אם רוצה לקרב $\frac{1}{B}$ בדיוק של 2^{-p}

השגיאה תקיים $\delta_k < 2 \cdot 2^{-2^k}$

ומספיק $2 \cdot 2^{-2^k} < 2^{-p}$

כלומר $2^k - 1 > p$

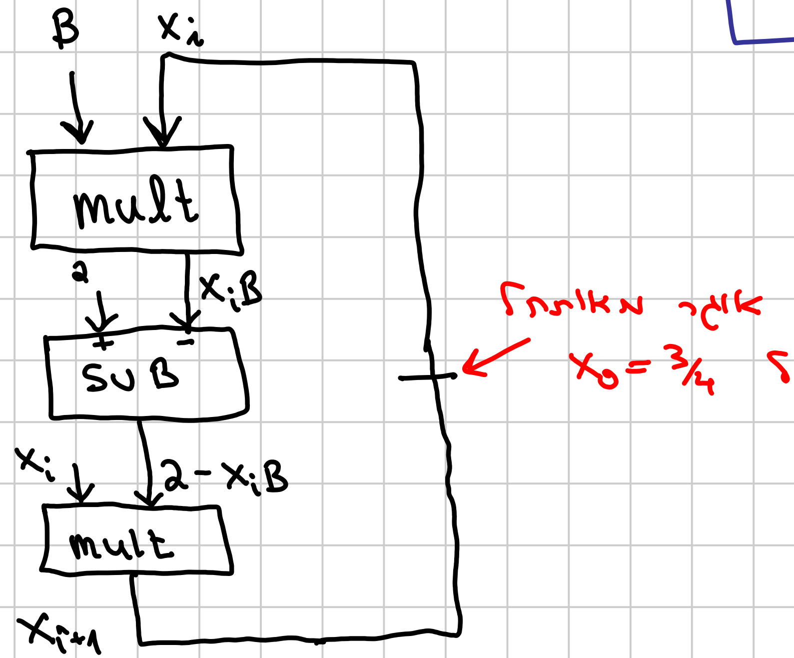
$\Leftarrow$ $2^k > p+1$ $\Leftarrow$ $k > \lg_2(p+1)$

נבחר פשוט $k = \lceil \lg_2(p+1) \rceil =$ מס' איטרציות ניוטון.

מימוש בחומרה

$$x_0 = \frac{3}{4}$$

$$x_{i+1} \leftarrow x_i(2 - x_i B)$$



בעיה: חישובים $x_i B$, $2 - x_i B$, $x_i(2 - x_i B)$

אינם מדויקים.

אילו היו מדויקים אזי

כאשר $n = length(B)$

$$length(x_i) = 2 \cdot length(x_{i-1}) + n$$

$$= (2^i - 1)\, n + 2 \cdot 2^i$$

הוכחה:

$$\text{length}(x_0) = 2$$

$$\text{length}(x_{i+1}) = 2\,\text{length}(x_i) + n$$

ונוכיח באינד': בסיס $i=0$ קל.

$$\text{length}(x_{i+1}) = 2\,\text{length}(x_i) + n$$

$$\overset{(\text{ה"א})}{=} 2\cdot(2^i-1)n + 2^2\cdot 2^i + n$$

$$= (2^{i+1}-1)n + 2^{i+1} \quad \blacksquare$$

נזכר $\lceil \lg p+1 \rceil$ איטרציות, ולכן האורך של ה"דוקים" יגיע ל

$$\Omega\left(2^{\lg(p+1)}\cdot n\right) = \Omega(p\cdot n)$$

כלומר: דיוק של p ספרות יצריך חישוב עם pn ספרות...

לא סביר!

חישובי ביניים לא מדוייקים

בכל איטרציה: $X_{i+1} = X_i(2 - X_i B)$

נסמן:

$Z_i \triangleq \lfloor X_i \cdot B \rfloor_\sigma$ $\qquad$ $Z_i^* \triangleq X_i \cdot B$

$T_i \triangleq (2 - 2^{-\sigma}) - Z_i$ $\qquad$ $T_i^* = 2 - Z_i^*$

$X_{i+1} \triangleq \lfloor X_i \cdot T_i \rfloor_\sigma$ $\qquad$ $X_{i+1}^* = X_i \cdot T_i^*$

חישוב לא מדוייק $\qquad$ חישוב מדוייק

וניצה $\delta_{i+1} \le 2\delta_i^2 + O(2^{-\sigma})$ $\qquad$ $\delta_{i+1}^* \le 2\delta_i^*$

סימון: $\lfloor y \rfloor_\sigma$:  $\left(y - 2^{-\sigma} < \lfloor y \rfloor_\sigma \le y \right)$

משפט: אם $\sigma \geq 4$, $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, $-\frac{1}{8} < \delta_0 < \frac{1}{8}$

אז לכל i:

1) $x_i \in (0, 1)$

2) $0 < \delta_{i+1} < 2\delta_i^2 + 2 \cdot 2^{-\sigma}$

הוכחה:

$$\delta^*_{i+1} \triangleq \frac{1}{B} - x^*_{i+1}$$

$$\Delta_2 \triangleq x^*_{i+1} - x_i T_i$$

$$\Delta_3 \triangleq x_i T_i - x_{i+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} z_i^* \triangleq x_i \cdot B & z_i \triangleq \lfloor x_i \cdot B \rfloor_\sigma \\ T_i^* = 2 - z_i^* & T_i \triangleq (2 - 2^{-\sigma}) - z_i \\ x_{i+1}^* = x_i \cdot T_i^* & x_{i+1} \triangleq \lfloor x_i \cdot T_i \rfloor_\sigma \end{array}}$$

ולכן $\delta_{i+1} \triangleq \frac{1}{B} - x_{i+1} = \delta^*_{i+1} + \Delta_2 + \Delta_3$

כבר ראינו $\delta^*_{i+1} \leq 2\delta_i^2$

כעת נחסום את Δ_2, Δ_3 :

$$\Delta_2 = x_i T_i^* - x_i T_i$$
$$= x_i (T_i^* - T_i) < x_i \cdot 2^{-\sigma} < 2^{-\sigma}$$

טענה של משפט 1-8 $x_i<1$

$$\Delta_3 = x_i T_i - x_{i+1} = x_i \cdot T_i - \lfloor x_i T_i \rfloor_\sigma < 2^{-\sigma}$$

$\boxtimes$

<u>מסקנה:</u> ניצול היציבות המספרית של איטרציות ניוטון מאפשרת חישוב לא מדוייק בכל איטרציה מבלי שהשגיאה תצטבר!

הדיוק הנדרש $2^{-\sigma}$ בחישובי הביניים אינו גדול בהרבה מהדיוק של התוצאה הסופית!